Løsningsforslag til delprøve i fag A3494 Prosessregulering fredag 15. oktober 2004 kl. 10.15-12.15

October 15, 2004

Oppgave 1 (10%): Diverse spørsmål

a) Egenverdiene til systemmatrisen A finnes som røttene til den karakteristiske ligning

$$|\lambda I - A| = 0 \tag{1}$$

Merk at du gjerne kan uttrykke den karakteristiske ligning vha. s som variabel, dvs.

$$|sI - A| = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n = 0 \tag{2}$$

Dersom egenverdiene er reelle og negative finner vi tidskonstantene

$$T_i = \frac{1}{\lambda_i} \;\; \forall \;\; i = 1, \ldots, n \tag{3}$$

b) En Laplacetransformasjon av tilstandsrommodellen gir

$$h_p(s) = D(sI - A)^{-1}B \tag{4}$$

c)

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \det(\begin{bmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix}) \\ &= (\lambda + 2)(\lambda + 3) - 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Løsningen av 2. grads polynomet er da

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \tag{6}$$

Egenverdiene er da gitt ved

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4 \tag{7}$$

Tidskonstantene til systemet er gitt ved

$$T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = 1, \quad T_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{4} \tag{8}$$

d) Vi benytter formelen over for beregning av transferfunksjonen. Først har vi at

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} s + 3 & 1 \\ 2 & s + 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Dette gir

$$\begin{aligned} h_p(s) &= D(sI - A)^{-1}B \\ &= \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 2 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{11s+39}{s^2+5s+4} = \frac{11s+39}{(s+1)(s+4)} \end{aligned} \quad (10)$$

e) Nullpunktene til systemet finnes som røttene til tellerpolynomet i transferfunksjonen, $h_p(s)$. I dette tilfellet har vi

$$11s + 39 = 0 \quad (11)$$

som gir et nullpunkt

$$s = -\frac{39}{11} \approx -3.3455 \quad (12)$$

Oppgave 2 (8%): Halveringsregelen

a) Vi har at

$$T_1 := T_1 + \frac{1}{2}T_2 \quad (13)$$

$$\tau := \tau + \frac{1}{2}T_2 + T_3 \quad (14)$$

b) Vi har at

$$T_1 := T_1 \quad (15)$$

$$T_2 := T_2 + \frac{1}{2}T_3 \quad (16)$$

$$\tau := \tau + \frac{1}{2}T_3 \quad (17)$$

Oppgave 3 (12%): Skogestad PID tuning

a) Transferfunksjonen fra r til y er gitt ved

$$\frac{y}{r} = \frac{h_c h_p}{1 + h_c h_p} \quad (18)$$

b) Vi tar utgangspunkt i (18) og løser ut for h_c og får

$$h_c = \frac{1}{h_p} \frac{\frac{y}{r}}{1 - \frac{y}{r}} \tag{19}$$

Innsetter vi for h_p som gitt i oppgaveteksten og den spesifiserte settpunktsresponsen, $\frac{y}{r}$ får vi

$$\begin{aligned} h_c &= \frac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{k(1-\tau s)} \frac{\frac{1-\tau s}{1+T_c s}}{1 - \frac{1-\tau s}{1+T_c s}} \\ &= \frac{1}{k} \frac{1+T_1 s}{(T_c+\tau)s}(1+T_2 s) = \frac{T_1}{k(T_c+\tau)} \frac{1+T_1 s}{T_1 s}(1+T_2 s) \end{aligned} \tag{20}$$

Sammenligner vi dette med det oppgitte uttrykket for en PID regulator på kaskadeform får vi at

$$K_p = \frac{T_1}{k(T_c+\tau)}, \quad T_i = T_1, \quad T_d = T_2 \tag{21}$$

Et valg for tidskonstanten til det lukkede systemet, T_c, er

$$T_c = \tau \tag{22}$$

eller $T_c \geq \tau$. For $T_c = \tau$ får vi

$$K_p = \frac{T_1}{2k\tau}, \quad T_i = T_1, \quad T_d = T_2 \tag{23}$$