Delprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering torsdag 23. oktober 2003 kl. 13.15-15.15

Delprøven består av: 3 oppgaver.
Oppgaven teller 40 % av sluttkarakteren.
Det er 4 sider i delprøven.
Tillatte hjelpemidler: vedlegg til oppgaven

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Kybernetikk og industriell IT
Institutt for elektro, IT og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (10%): Diverse spørsmål

Gitt et lineært og kontinuerlig system beskrevet med

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$$y = Dx + Eu, \tag{2}$$

der $x \in \mathbb{R}^n$ er systemets tilstandsvektor.

a) Definer styrbarhetsmatrisen. Hvordan kan vi basert på denne undersøke om systemet er tilstands styrbart?

b) Definer styrbarhets Gramian matrisen. Hvordan kan vi basert på denne undersøke om systemet er tilstands styrbart?

c)

- Beskriv en metode basert på et generalisert egenverdiproblem for å finne transmisjons-nullpunktene i et dynamisk system som gitt i (1) og (2).
- Finn nullpunktene til et system der

$$A = -1, \;\; B = 2, \;\; D = 1, \;\; E = -0.5. \tag{3}$$

basert på den generaliserte egenverdimetoden.

d) Finn systemets transfermatrise, $H(s)$, med utgangspunkt i tilstandsrom-modellen i (1) og (2) slik at

$$y(s) = H(s)u(s). \tag{4}$$

e) Beskriv kort hvordan man kan bestemme:

- systemets polpolynom $\pi(s)$ og systemets poler.
- systemets nullpunktspolynom $\rho(s)$ og systemets nullpunkter.

med utgangspunkt i transfermatrisemodellen i (2).

Oppgave 2 (20%)
(Kontinuerlig LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven studere et kontinuerlig LQ optimalreguleringsproblem. Utgangspunktet er en prosess som vi modellerer med en kontinuerlig tilstandsrommodell av formen

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$

$$y = Dx, \tag{6}$$

der initialtilstandsvektoren, $x(t_0)$, er kjent.

a) Anta at vi har gitt en objektfunksjon

$$J = \frac{1}{2}y(t_1)^T S y(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(y^T Q y + u^T P u)dt. \tag{7}$$

- Utled og finn et uttrykk for det optimale pådraget, $u(t)^* \ \forall \ t_0 \leq t \leq t_1$, for prosessen i (5) og (6) som minimaliserer objektfunksjonen (7). Svaret skal bla bestå av en Riccatiligning med grensebetingelse.

b) Anta nå at kriteriet i (7) modifiseres til

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}(y^T Q y + u^T P u)dt. \tag{8}$$

- Sett opp et uttrykk for det optimale pådraget i dette tilfellet. Hva er spesielt med regulatoren i dette tilfellet sammenlignet med regulatoren i punkt 2a) ?
- Hvilket krav har vi til systemmatrisene A, B og D samt vektmatrisene Q og P for at det optimalregulerte systemet skal være garantert stabilt ?

c) Anta nå at kriteriet er gitt ved

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}((r-y)^T Q(r-y) + u^T P u)dt. \tag{9}$$

Finn et uttrykk for det optimale pådraget, u^*, for prosessen i (5) og (6) som minimaliserer denne objektfunksjonen (9).

Oppgave 3 (10%)
(Diskret LQ optimalregulering)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en diskret modell av formen

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k, && (10) \\ y_k &= Dx_k. && (11) \end{aligned}$$

Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å finne en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}x_N^T S x_N + +\frac{1}{2}\sum_{k=i}^{N-1}(x_k^T Q x_k + u_k^T P u_k). \tag{12}$$

Q, P og S er symmetriske vektmatriser.

a) Utled og finn et uttrykk for det optimale pådraget, u_k^*, som minimaliserer kriteriet (12). Svaret skal bestå av et uttrykk for det optimale pådraget samt en diskret Riccati ligning.

b) Anta nå at tidshorisonten vi optimaliserer over er uendelig, dvs. $N \to \infty$. Hva blir nå løsningen på optimalreguleringsproblemet.

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\dot{x} = f(x,u,t) \tag{13}$$
$$J = S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x,u,t)dt \tag{14}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$H = L + p^T f \tag{15}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{16}$$
$$p(t_1) = \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} \tag{17}$$

Diskret optimalregulering

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, k) \tag{18}$$
$$J_i = S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \tag{19}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$H_k = L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T (x_{k+1} - x_k) \tag{20}$$
$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{21}$$
$$p_N = \frac{\partial S}{\partial x_N} \tag{22}$$

Derivasjonsregler

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qx) = Q^T \tag{23}$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(x^T Q x) = Qx + Q^T x \tag{24}$$