Løsningsforslag til delprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering tirsdag 28. september 2004 kl. 10.15-12.15

September 28, 2004

Oppgave 1 (12%): Diverse spørsmål

a)

Løsningen til tilstandsligningen $\dot{x} = Ax + Bu$ med kjent initialverdi $x(t_0)$ er gitt ved

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{1}$$

Når $u(\tau)$ er konstant over tidsintervallet vi integrerer over kan vi sette $u(\tau) = u(t_0)$ utenfor integrasjonen, dvs. vi får

$$x(t) = \Phi x(t_0) + \Delta u(t_0) \tag{2}$$

der

$$\Phi = e^{A(t-t_0)} \tag{3}$$

er systemets transisjonsmatrise. Videre har vi at

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bd\tau = [-A^{-1}e^{A(t-\tau)}B]_{t_0}^{t} = -A^{-1}(I - e^{A(t-t_0)})B \\ &= A^{-1}(e^{A(t-t_0)} - I)B. \end{aligned} \tag{4}$$

Vi får nå en diskret modell ved å sette $t = t_0 + \Delta t$ inn i løsningen over. Vi antar at Δt er et konstant samplingsintervall (steglengde). Videre kan vi anta at t_0 antar tidspunktene $t_0 = k\Delta t$ der k er de diskrete tidspunktene $k = 0, 1, 2, \ldots$ (evt. $k = k_0, k_0 + 1, \ldots$. Videre gjør vi for enkelthets (notasjonsmessig) skyld følgende definisjoner

$$x(t_0) = x(k\Delta t) \stackrel{def}{=} x_k \tag{5}$$

$$u(t_0) = u(k\Delta t) \stackrel{def}{=} u_k \tag{6}$$

Dette betyr jo og at

$$x(t) = x(t_0 + \Delta t) = x(k\Delta t + \Delta t) = x((k+1)\Delta t) \stackrel{def}{=} x_{k+1} \tag{7}$$

Dette gir den diskrete tilstandsligningen

$$x_{k+1} = \Phi x_k + \Delta u_k \tag{8}$$

der

$$\Phi = e^{A\Delta t} \tag{9}$$

$$\Delta = A^{-1}(e^{A\Delta t} - I)B. \tag{10}$$

legg merke til at vi normalt skriver diskrete modeller med A og B som systemmatriser, dvs. at vi skriver

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k. \tag{11}$$

b) Vi finner systemets transmisjonsnullpunkter som røttene til den karakteristiske ligningen

$$\rho(s) = \det(sI_g - S) = 0 \tag{12}$$

der

$$S = \begin{bmatrix} A & B \\ D & E \end{bmatrix}, \quad I_g = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

c) Systemets transfermatrise er

$$H(s) = D(sI - A)^{-1}B + E \tag{14}$$

d) Polpolynomet er gitt som den minste felles nevner for alle underdeterminanter av alle ordner. Ser vi på determinanten til $H(s)$, dvs.

$$|H(s)| = \frac{2s-4}{(s+1)^2(s+2)} + \frac{s-2}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{3s(s-2)}{(s+1)^2(s+2)} \tag{15}$$

får vi at polpolynomet er gitt ved

$$\pi(s) = (s+1)^2(s+2) \tag{16}$$

Systemet har tre poler

$$s_1 = -1, \ \ s_2 = -1, \ \ s_3 = -2 \tag{17}$$

Nullpunktspolynomet er gitt som den største felles divisor (teller) til underdeterminantene av orden lik den naturlige rangen til transfermatrisen. I dette tilfellet kan rangen til $H(s)$ bli maksimalt 2. Det holder derfor i dette tilfellet å danne nullpunktspolynomet fra determinanten (15). Nullpunktspolynomet er derfor gitt ved

$$\rho(s) = 3s(s-2) \tag{18}$$

Systemet har ett transmisjonsnullpunkt

$$s = 2 \tag{19}$$

Legg merke til at dette ligger i høyre halvplan og systemet er følgelig et ikke-minimum-fase system. Man kan forvente inversrespons i en eller begge utgangene etter sprang i inngangene.

Oppgave 2 (18%): LQ optimalregulering

a) Løsningen på optimalreguleringsproblemet er gitt ved

$$u(t)^* = G(t)x(t) \tag{20}$$

der den tidsvarierende tilbakekoblingen er gitt ved

$$G(t) = -P^{-1}B^T R \tag{21}$$

der $R = R(t)$ er tidsvarierende og gitt som den positive løsningen til Riccati-ligningen

$$-\dot{R} = A^T R + RA - RBP{-}1B^T R + Q \tag{22}$$

med grensebetingelse ved slutttiden

$$R(t_1) = S \tag{23}$$

b) Vi ser at tidshorisonten er uendelig. Vi får da et tidsinvariant problem der $\dot{R} = 0$. Løsnngen på optimalreguleringsproblemet i det skalare tilfellet blir da idet vi benytter små bokstaver

$$u^* = gx \tag{24}$$

der

$$g = -\frac{b}{p}r \tag{25}$$

der r er den positive løsningen av den stasjonære (algebraiske) Riccatiligningen

$$2ar - \frac{b^2}{p}r^2 + q = 0 \tag{26}$$

Dette er en 2. grads ligning som jeg velger å omskrive slik

$$\frac{b^2}{p}r^2 - 2ar - q = 0 \tag{27}$$

Dette gir løsningen

$$r = \frac{2a + \sqrt{4a^2 + 4\frac{b^2}{p}q}}{2\frac{b^2}{p}} = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{p}}}{b^2}p \tag{28}$$

Dette gir proporsjonalkonstanten

$$g = -\frac{b}{p}r = -\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{p}}}{b} \tag{29}$$

Det lukkede systemet er da gitt ved tilstandsligningen

$$\dot{x} = ax + bu^* = (a + bg)x \tag{30}$$

Egenverdien til det lukkede systemet er da gitt ved

$$\lambda_{cl} = a + bg = -\sqrt{a^2 + b^2\frac{q}{p}} \tag{31}$$

Vi ser at det optimalregulerte systemet er garantert stabilt dersom vi velger forholdet mellom q og p positiv, dvs.

$$\frac{q}{p} > 0 \tag{32}$$

Det korrekte kravet i dette tilfellet er å velge vektene slik at

$$a^2 + b^2\frac{q}{p} > 0 \tag{33}$$

Vi ser videre at dersom forholdet $\frac{q}{p}$ øker så flyttes egenverdien mot venstre i det komplekse plan og systemet blir hurtigere. reduserer vi forholdet $\frac{q}{p}$ mot null går systemet fra å være regulert til å bli uregulert.