Sluttprøve i fag A3802 Avansert reguleringsteknikk med programmering mandag 11. desember 2006 kl. 9.00 - 12.00

Sluttprøven består av: 3 oppgaver.
Oppgaven teller 70 % av sluttkarakteren.
Det er 4 sider i sluttprøven.
Tillatte hjelpemidler: vedlegg til oppgaven

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: David Di Ruscio
Tlf: 51 68, Rom: B249

Kybernetikk og industriell IT
Institutt for elektro, IT og kybernetikk
Avdeling for teknologiske fag
Høgskolen i Telemark
N-3914 Porsgrunn

Oppgave 1 (30%)
(diskret optimalregulering: med og uten krysskoblinger i kriteriet)

Gitt et LQ kriterium definert over tidshorisonten $i \leq k \leq N$, dvs.

$$J_i = \frac{1}{2} x_N^T S x_N + \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{N-1} [y_k^T Q y_k + u_k^T P u_k], \tag{1}$$

der $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ og $P \in \mathbb{R}^{r \times r}$ er symmetriske vektmatriser.

a) Anta at vi har gitt en diskret tilstandsrommodell

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \tag{2}$$
$$y_k = Dx_k + Eu_k, \tag{3}$$

for en prosess. Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved (1) med prosessmodellen (2) og (3) som bibetingelse.

Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning.
3. Grensebetingelser for Riccati ligningen.

b) Anta nå et optimalkriterium

$$J_i = \frac{1}{2} \sum_{k=i}^{\infty} [(r_k - y_k)^T Q (r_k - y_k) + u_k^T P u_k], \tag{4}$$

der r_k er en referansevektor for målevektoren y_k.

Finn den optimale reguleringsstrukturen som minimaliserer kriteriet J_i gitt ved ligning (4) og med modellen (2) og (3) som bibetingelse.

Løsningen skal bestå av:

1. Et utrykk for den optimale pådragsvektor u_k.
2. En Riccati ligning og en differens ligning.
3. Hva med grensebetingelser i dette tilfellet?

Oppgave 2 (40%)
(Diskret LQ optimalregulering med integralvirkning)

Vi skal i denne oppgaven utlede en LQ-optimal regulator for et system der vi har etablert en modell av formen

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + v, \tag{5}$$
$$y_k = Dx_k + w, \tag{6}$$

der v og w er konstante og ukjente forstyrrelser.
Med utgangspunkt i tilstandsrommodellen over ønsker vi å designe en diskret LQ-optimal regulator, dvs. en regulator som minimaliserer kriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}((r-y_k)^T Q(r-y_k) + \Delta u_k^T P \Delta u_k). \tag{7}$$

der $\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$ og r er en konstant referansevektor. Q og P er symmetriske og positiv semidefinite matriser.

a) Vis at det er mulig å skrive modellen i (5) og (6) på endringsformen

$$\Delta x_{k+1} = A\Delta x_k + B\Delta u_k, \tag{8}$$
$$\Delta y_k = D\Delta x_k, \tag{9}$$

der

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ \ \Delta u_k = u_k - u_{k-1},\ \ \Delta y_k = y_k - y_{k-1}. \tag{10}$$

Hva er hensikten med dette ?

b) For å løse optimalreguleringsproblemet over så er det hensiktsmessig å skrive tilstandsrommodellen på en form som sammen med kriteriet i (7) danner et "standard LQ-optimalreguleringsproblem". Vis at modellen i (5) og (6) kan skrives på formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\Delta u_k, \tag{11}$$
$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \tag{12}$$

der

$$\tilde{x}_k = \begin{bmatrix} \Delta x_k \\ r - y_{k-1} \end{bmatrix},\ \ \tilde{y}_k = r - y_k. \tag{13}$$

Du skal oppgi uttrykk for matrisene $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ og $\tilde{D}$. Merk: du kan her med fordel benytte modellen i (8) og (9) som utgangspunkt.

c) Modellen vi kom frem til i punkt 2b) og kriteriet i (7) danner et standard diskret LQ optimalreguleringsproblem av formen

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{A}\tilde{x}_k + \tilde{B}\tilde{u}_k, \tag{14}$$
$$\tilde{y}_k = \tilde{D}\tilde{x}_k, \tag{15}$$

med optimalkriteriet

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{\infty}(\tilde{y}_k^T Q \tilde{y}_k + \tilde{u}_k^T P \tilde{u}_k), \tag{16}$$

der vi for enkelthetsskyld har definert

$$\tilde{u}_k = \Delta u_k. \tag{17}$$

Utled eller sett opp den LQ optimale løsningen av formen

$$\tilde{u}_k = \tilde{G}\tilde{x}_k. \tag{18}$$

Løsningen består av

1. en diskret Riccati ligning
2. et uttrykk for regulatormatrisen $\tilde{G}$.
3. Sett deretter opp et utrykk for det aktuelle pådraget av formen

$$u_k = f(\cdot) \tag{19}$$

som skal benyttes til å regulere prosessen.

Tips: i punkt 1 og 2 over kan man benytte resultatene fra oppgave 1 med $E = 0$ dersom man ikke vil utlede det samme på nytt.

d) En PI regulator kan i Laplace-planet skrives som

$$u = K_p \frac{1 + T_i s}{T_i s}(r - y). \tag{20}$$

1. Sett opp en kontinuerlig tidsplanbeskrivelse (tilstandsrommodell) av PI regulatoren i (20).
2. Lag en diskret tidsplanbeskrivelse (tilstandsrommodell) av PI-regulatoren. Du kan her benytte eksplisitt Eulers metode.
3. Skriv den diskrete PI-regulatoren på endringsform og sammenlign med LQ-optimalregulatoren i punkt 2c).

Vedlegg

Kontinuerlig optimalregulering

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{21}$$

$$J = S(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} L(x, u, t)dt \tag{22}$$

Det kontinuerlige maksiumumsprinsippet

$$H = L + p^T f \tag{23}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{24}$$

$$p(t_1) = \frac{\partial S}{\partial x}|_{t_1} \tag{25}$$

Diskret optimalregulering

$$x_{k+1} - x_k = f(x_k, u_k, k) \tag{26}$$

$$J_i = S(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} L(x_k, u_k, k) \tag{27}$$

Det diskrete maksiumumsprinsippet

$$H_k = L(x_k, u_k, k) + p_{k+1}^T(x_{k+1} - x_k) \tag{28}$$

$$p_{k+1} - p_k = -\frac{\partial H_k}{\partial x_k} \tag{29}$$

$$p_N = \frac{\partial S}{\partial x_N} \tag{30}$$

Derivasjonsregler

$$\frac{\partial}{\partial x}(Qx) = Q^T, \quad \frac{\partial}{\partial x}(x^T Qx) = Qx + Q^T x \tag{31}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}((r - Dx)^T Q(r - Dx)) = -2D^T Q(r - Dx) \tag{32}$$