Department of Technology
Systems and Control Engeneering
Telemark University College
DDiR, September 6, 2010

Advanced Control with Implementation

Solution Exercise 3

Solution Task 1

a)

The use of the **lqr** function gives $u = Gx$ with $G = -0.9050$. The solution to the corresponding Riccati equation is $R = 0.9050$. This part of the exercise is implemented in the MATLAB scrip m-file **losn_ov3_oppg1a.m**.

b)

Using the **lqr** m-file function gives

$$G = \begin{bmatrix} -1.9025 & 1.0000 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1.9025 & -1.0000 \\ -1.0000 & 2.0025 \end{bmatrix} \tag{1}$$

The LQ optimal control feedback is then of the type

$$u = g_1 x + g_2 z \tag{2}$$

where the controller state z is given by

$$\dot{z} = -x. \tag{3}$$

This is a PI-controller for the process

$$\dot{x} = ax + bu \tag{4}$$

Note, that if we introduce a reference x^0 different from zero then we may write the controller as

$$\begin{aligned} \dot{z} &= x^0 - x, && (5) \\ u &= -g_1(x^0 - x) + g_2 z && (6) \end{aligned}$$

By comparing this LQ optimal controller and a PI-controller we find that they are identical and that: $K_p = -g_1$ and $K_p/T_i = g_2$, i.e.. $T_i = -g_1/g_2$. This subtask is implemented in the MATLAB script **losn_ov3_oppg1b.m**.

Løsning til oppgave 2

Et hovedpoeng i denne oppgaven er å vise at LQ-optimalreguleringsproblemet kan løses som et optimaliseringsproblem. Vi har generelt at kriteriet i oppgaveteksten kan skrives som

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T P u) dt \tag{7}$$

Innsetter vi løsningen av $\dot{x} = (A + BG)x$ der $x(t_0) = x_0$ er gitt, d.v.s.,

$$x = e^{(A+BG)(t-t_0)} x_0 \tag{8}$$

får vi at

$$J(G) = x_0^T R x_0 \tag{9}$$

der

$$R = \int_{t_0}^{t_1} e^{(A+BG)^T(t-t_0)} (Q + G^T P G) e^{(A+BG)(t-t_0)} dt \tag{10}$$

Legg merke til at R har samme form som en observerbarhets-gramian matrise.

a)

Vi skal i denne oppgaven finne G. Det er flere måter å gjøre dette på . Siden problemet er skalart så kan det meste gjøres analytisk. Kriteriet over kan da skrives

$$J(g) = R x_0^2 \tag{11}$$

der

$$R = \int_{t_0}^{t_1} (q + pg^2) e^{2(a+bg)(t-t_0)} dt \tag{12}$$

som gir

$$R = \frac{(q + pg^2)}{2(a + bg)} (e^{2(a+bg)(t_1-t_0)} - 1) \tag{13}$$

Setter vi inn $t_0 = 0$ og $t_1 = t$ får vi

$$R = \frac{(q + pg^2)}{2(a + bg)} (e^{2(a+bg)t} - 1) \tag{14}$$

Vi kan nå minimalisere funksjonen $J(g)$ mht. g. Vi har implementert selve funksjonsverdien i funksjonen **obfunc.m**. Denne ligger på katalogen

```
i:\laerer\davidr\matlab_kurs\matlab_files
```

Dersom vi benytter en startverdi, f.eks. $g_0 = -0.5$, så kan vi løse problemet vha. MATLAB funksjonen **fminsearch.m**. Kjøring i MATLAB gir

```
 g=fminsearch('obfunc',-0.5)

g =

   -0.9005
```

Vi har her løst et optimalreguleringsproblem med endelig horisont, dvs. med $t_1 = 7$. Dersom vi øker t_1 mot uendelig vil vi få at løsningen blir identisk med LQR løsningen i MATLAB. Du kan selv sjekke dette ved å øke t_1 til f.eks. $t_1 = 70$ i **obfunc.m**. Løsningen på LQ-reguleringsproblemet med uendelig horisont, dvs. med $t_1 \to \infty$ kan også beregnes i MATLAB som

```
 [k,r]=lqr(a,b,q,p)

k =

    0.9050

r =

    0.9050

 g=-k

g =

   -0.9050
```

Merk, at r er løsningen til den algebraiske Riccati-ligningen $A^T R + RA - RBP^{-1}B^T R + Q = 0$ og $g = -P^{-1}B^T R$.
Merk: det skalare LQ-regulator problemet er løst analytisk og i detalj i avsnitt 3.11 i kompendiet.

b)

Funksjonsverdien $J(G)$ er i dette tilfelle implementert i funksjonen **obfunc2.m** og **obfunc3.m**. Legg her merke til at **obfunc2.m** er basert på Euler integrasjon og langt langsommere sammenlignet med **obfunc3.m** som dessuten er langt mer nøyaktig (dvs. eksakt). Et hovedscript som kan kjøres direkte i MATLAB er gitt i M-filen **main_obfunc2.m**. Kjøring gir

```
G =

   -1.9016    0.9962
```

Merk at i funksjonen **obfunc3.m** har vi benyttet ligninger tilsvarende (1.42) og (1.43) i kompendiet for å beregne gramian matrisen $R = W_o$.
Benytter vi **lqr** funksjonen får vi

```
 [k,r]=lqr(a,b,q,p)

k =

    1.9025   -1.0000


r =

    1.9025   -1.0000
   -1.0000    2.0025

  G=-k

G =

   -1.9025    1.0000
```

Vi har i denne oppgaven funnet en PI-regulator for prosessen i punkt a). For flere detaljer se eksempel 2.1 i kompendiet. Sammenhengen mellom den optimale regulator-matrisen $G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix}$ og (optimale) PI-reg. parametre er da $K_p = g_1 \; T_i = \frac{g_1}{g_2}$.
Vi har altså funnet en optimal PI-regulator gitt ved

$$\begin{aligned} \dot{z} &= r - y &(15)\\ u &= g_1 x + g_2 z &(16) \end{aligned}$$

for en prosess

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + bu &(17)\\ y &= x &(18) \end{aligned}$$